Eindige Element Analise van Gelamineerde Veselversterkte Plate

J. van der Westhuizen* en J. J. van Wyk**
Universiteit van Stellenbosch

A C_0 finite element is formulated for the analysis of laminated anisotropic composite plates, based on Mindlin plate bending theory with shear correction. A quadratic Serendipity element based on this formulation is added to the ADINA finite element program and its numeric results are compared with other elements and closed form solutions for laminated composite plates.

Simbolelys

a	element-vryheidsgrade
A_{ij}	styfheid in plaatvlak
B_{ij}	koppelstyfheid
D_{ij}	buigstyfheid
E	Young se modulus
E_{ij}	skuifstyfheid
$E_{ijk\ell}$	algemene styfheidskoëffisiënt
G	skuifmodulus
h	dikte van lamina
K_1, K_2	dwarsskuifkorreksiefaktore
M_{ij}	buigmoment per eenheidsbreedte
$\bar{N}$	vormfunksie
N_{ij}	krag per eenheidsbreedte
$\bar{Q}_{ij}$	lamina-styfheid
Q_{ij}	dwarsskuifkrag per eenheidsbreedte
t	plaatdikte
u	x-verplasing
v	y-verplasing
w	z-verplasing
γ	dwarsskuifvervormingsvektor
γ_{ij}	skuifvervorming
Γ	inverse van twee-dimensionele Jakobiaan
ϵ_{ii}	normaalvervorming
θ_i	rotasie-vryheidsgraad
υ_{ij}	Poisson se verhouding
σ_{ij}	spanning
ϕ	veseloriëntasie
χ	krommingsvektor

voetskrifte

c	plaat-middelpunt
L	veselrigting
O	plaat-middelvlak
T	rigting dwars op vesels
T′	dikte-rigting

Inleiding

Veselplastieke (veselversterkte saamgestelde materiale) word oor die afgelope aantal jare al hoe meer toegepas in ingenieurstrukture, veral in gelamineerde-plaatvorm. Die materiaal het twee inherente voordele bo ander ingenieursmateriale, naamlik (i) goeie spesifieke eienskappe soos byvoorbeeld 'n hoë sterkte tot massa verhouding, en (ii) makroskopiese anisotropie wat deur die ontwerper getooi kan word na die strukturele behoefte van die spesifieke komponent/ontwerp, deur die veseloriëntasie en laminasievolgorde te varieer.

Ontwikkeling en ondervinding van strukturele analise van veselplastiekplate toon dat die effek van dwarsskuif meer prominent is as by isotropiese materiale. Die primêre oorsaak hiervan is die relatief lae dwarsskuifmodulus met betrekking tot die invlak trek- en drukmodulusse. 'n Sekondêre oorsaak is dat 'n veselplastiek-plaat vir 'n sekere strukturele funksie dikwels dikker is as sy isotropiese (metaal) eweknie, as gevolg van laer absolute sterktes en styfhede. Die Kirchhoff-Love kinematiese plaatbuig-aannames wat plat vlakke loodreg op die middelvlak voor vervorming, beperk om plat en loodreg op die middelvlak te bly tydens vervorming, is dus onaanvaarbaar, omdat dwarsskuifvervorming effektief tot nul beperk word. Mindlin plaatbuigteorie wat genoemde plat vlakke slegs beperk om plat te bly, is dus meer korrek omdat dwarsskuifvervorming toegelaat word.

Die plaatbuig benadering van Mindlin is veralgemeen vir gelamineerde anisotropiese plate deur Yang, Norris en Stavsky [1], en etlike eindige element formulerings gebaseer op hierdie benadering is al geëvalueer. 'n Voorbeeld is die C_0 penalisasie-element van Reddy [2]. Hy ondersoek lineêre en kwadratiese Serendipity-elemente sowel as die effek van integrasieorde. Noor en Mathers [3] vergelyk die werkverrigting van 8 en 12 node Serendipity-elemente, 9 en 16 node Lagrange-elemente en 'n 4 node Hermitiaan-element. Opvallend is dat die 8 node Serendipity-element beter reageer as die 9 node Lagrange-element in die toetsvoorbeeld. Pryor en Barker [4] het 'n 7 vryheidsgraad per node element ontwikkel wat volgens Whitney [5] se resultate, bevredigend reageer. Die vryheidsgrade bestaan uit verplasing, dwarsvlakrotasie en dwarsskuifvervorming. Lakshminarayana en Murthy [6] het 'n hoë orde driehoek element met 'n middelnode geformuleer volgens die YNS-teorie. Hierdie element is baie akkuraat, maar het 'n 45x45 styfheidsmatriks na kondensasie en hoë orde afgeleides word moeilik hanteer by randwaardes. Spilker et al [7 en 8] het 'n 8 node hibriede spanningselement geïmplimenteer wat uiters akkuraat is, maar relatief baie rekenaartyd verg. Na evaluasie van die literatuur en die sagteware-konstruksie van die ADINA eindige element pakket, is besluit om 'n 8 node Serendipity-element (soortgelyk aan die SQ8-element van Reddy [2]) gebaseer op die YNS-teorie, te formuleer en te implementeer.

Om die element te veralgemeen is dwarsskuifkorreksiefaktore, K_1 en K_2, ingevoer. Die motivering hiervoor is dat die Mindlin-aannames lei tot 'n konstante dwarsskuifvervorming oor die dikte van die plaat, terwyl dit onmoontlik is omdat ewewig op die plaatoppervlak nul dwarsskuifvervorming daar vereis. Die globale effek van die Mindlin-gegenereerde dwarsskuif is dus foutief en word gekorrigeer deur K_1 en K_2. Verskeie formuleringsbenaderings vir die numeriese bepaling van K_1 en K_2 is gepubliseer, byvoorbeeld Chow [9] en Bert [10], [11] en [12].

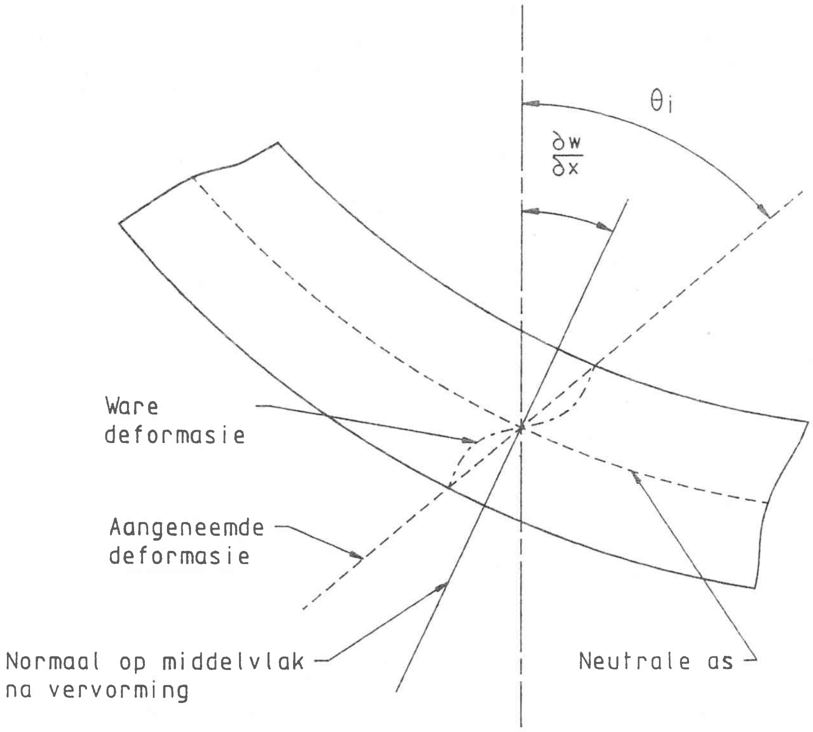
Makromeganika van Gelamineerde Veselversterkte Plate

Die algemene lineêre verband tussen spanning en vervorming

$$\sigma_{ij} = E_{ijk\ell}\epsilon_{k\ell}$$

kan vir die bousteen van 'n gelamineerde plaat, die ortotropiese lamina, vereenvoudig word na

*Senior Lektor, Departement Meganiese Ingenieurswese.
**Magisterstudent, Universiteit van Stellenbosch.



Figuur 1 – Rotasies

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & O & O \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & O & O \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & O & O \\ O & O & O & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ O & O & O & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

(Sien Bylae A vir die toepaslike vergelykings vir $\bar{Q}_{ij}$)

Die veralgemeende Mindlin-benadering, wat grafies voorgestel is in figuur 1, lei tot 'n verplasingsveld

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \qquad (2)$$

met gepaardgaande vervormingsveld

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \{\epsilon_o\} + z\{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

waar

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}^T &= [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \\ \{\epsilon_o\}^T &= [\partial u_o/\partial x \quad \partial v_o/\partial y \quad (\partial u_o/\partial y + \partial v_o/\partial x)] \\ \{\chi\}^T &= [-\partial\theta_x/\partial x \quad -\partial\theta_y/\partial y \quad -(\partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x] \\ \{\gamma\}^T &= [(\partial w/\partial x - \theta_x) \quad (\partial w/\partial y - \theta_y)] \end{aligned}$$

Die bydrae van al die laminas tot die plaat se styfheid word deur spanningsresultante gelewer. Figuur 2 toon die plaatkonfigurasie en figuur 3 die spanningsresultate.

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij}\, dz && i, j = 1,2 \\ M_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} z\, \sigma_{ij}\, dz && i, j = 1,2 \\ Q_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij}\, dz && i = 1,2 \\ & && j = 3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Deur vergelyking 4 te kombineer met vergelykings 1 en 3 volg

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & & \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & & \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & & \\ & \text{Sim.} & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & & \\ & & & & D_{22} & D_{26} & & \\ & & & & & D_{66} & & \\ & & & & & & E_{44} & E_{45} \\ & O & & & & & E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_o \\ \chi \\ \gamma \end{bmatrix}$$

of

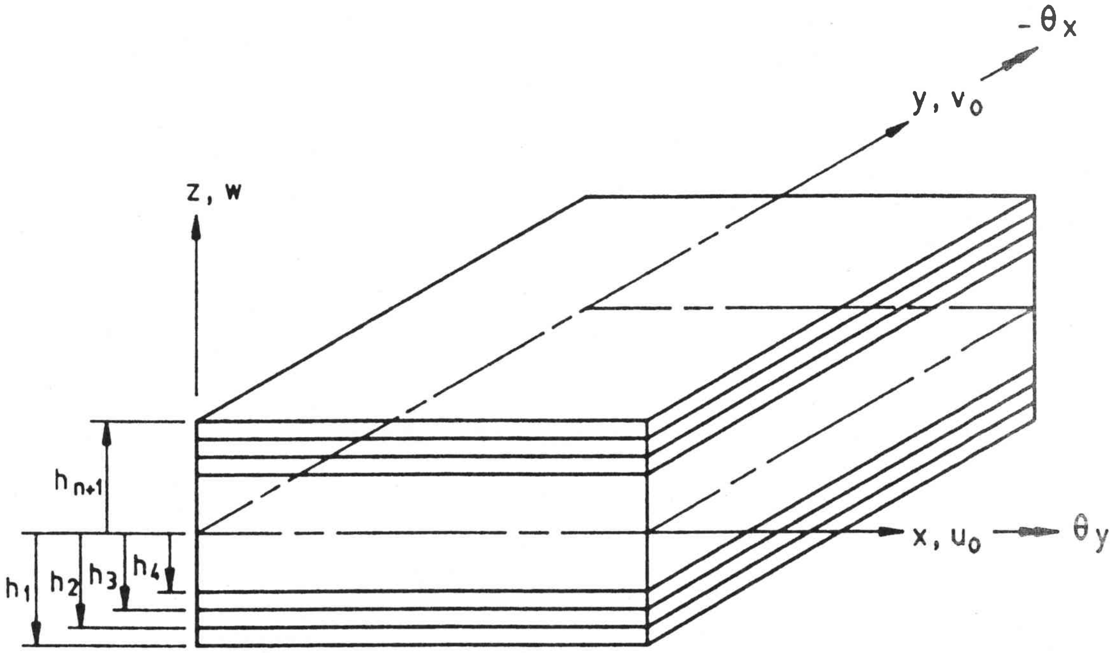
$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & O \\ B & D & O \\ O & O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_o \\ \chi \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad (5)$$

met

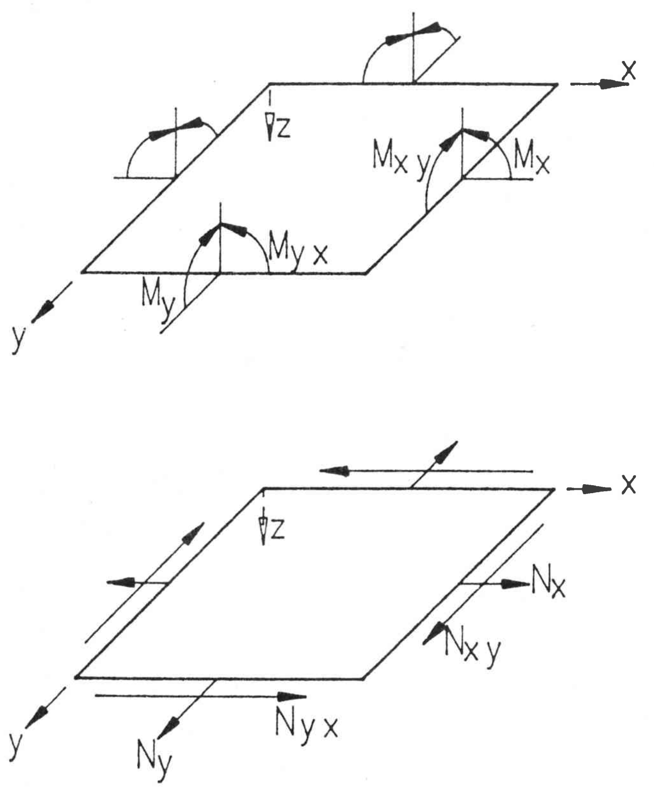
$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})_k\, (h_{k+1} - h_k) && i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})_k\, (h_{k+1}^2 - h_k^2) && i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} &= \tfrac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})_k\, (h_{k+1}^3 - h_k^3) && i, j = 1, 2, 6 \\ E_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})_k\, (h_{k+1} - h_k) && i, j = 4, 5 \end{aligned}$$

Met behulp van skuifkorreksiefaktore word vergelyking 5 aangepas om die effek van skuifdeformasie beter te modelleer.

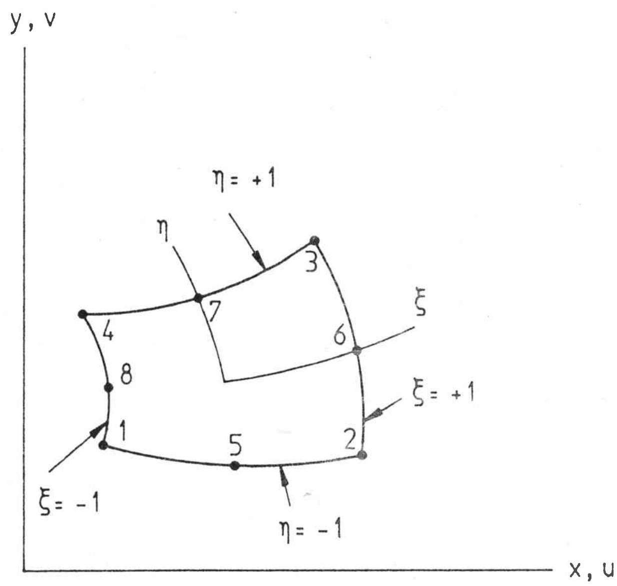
$$[E] = \begin{bmatrix} K_1^2\, E_{44} & K_1K_2E_{45} \\ K_1K_2E_{45} & K_2^2\, E_{55} \end{bmatrix}$$



Figuur 2 – Laminasie



Figuur 3 – Spanningsresultante



Figuur 4 – Die isoparametriese Serendipity-element

Eindige Element Formulering

Die isoparametriese kwadratiese element, getoon in figuur 4, volg die Serendipity-vormfunksies

$\bar{N}_i = (1 + \xi_o)(1 + \eta_o)(-1 + \xi_o + \eta_o)/4$ vir hoeknodes
$\bar{N}_i = (1 - \xi^2)(1 + \eta_o)/2$ vir midnodes met $\xi_i = 0$
$\bar{N}_i = (1 + \xi_o)(1 - \eta^2)/2$ vir midnodes met $\eta_i = 0$
$\xi_o = \xi\xi_i$, $\eta_o = \eta\eta_i$ met i die node-nommer

dus

$$[u_o \; v_o \; w_o \; \theta_x \; \theta_y]^T = \sum_{i=1}^{8} \bar{N}_i \, [u_{oi} \; v_{oi} \; w_{oi} \; \theta_{xi} \; \theta_{yi}]^T$$

Membraanvervorming word gegee deur

$$\{\epsilon\} = [BE] \, \{a\} \qquad (6)$$

waar

$$[BE] = [D_1] \, [d_1] \, [B_1]$$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[d_1] = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$[B_1]_{4\times 40} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar N_2}{\partial \xi} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \xi} & 0 & & 0 \\ \frac{\partial \bar N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar N_2}{\partial \eta} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \eta} & & & \\ & & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar N_2}{\partial \xi} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \xi} & \\ & 0 & & & \\ & & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar N_2}{\partial \eta} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{a\}^T = [u_{o1}\ u_{o2} \ldots u_{o8}\ v_{o1} \ldots v_{o8}\ w_{o1} \ldots w_{o8}\ \theta_{x1} \ldots \theta_{x8}\ \theta_{y1} \ldots \theta_{y8}]$$

Buigvervorming: word gegee deur

$$\{\chi\} = [BB]\{a\} \tag{7}$$

waar

$$[BB] = -[D_1][d_1][B_2]$$

$$[B_2]_{4\times 40} = \begin{bmatrix} & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \xi} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \xi} & 0 & \\ 0 & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \eta} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \eta} & & \\ & & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \xi} & \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \eta} & \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Skuifvervorming word gegee deur

$$\{\gamma\} = [BS]\{a\} \tag{8}$$

met

$$[BS] = [D_3][d_3][B_3]$$

$$[D_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[d_3] = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B_3]_{4\times 40} = \begin{bmatrix} & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \xi} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \xi} & & \\ 0 & & 0 & 0 \\ & \frac{\partial \bar N_1}{\partial \eta} \cdots \frac{\partial \bar N_8}{\partial \eta} & & \\ 0 & 0 & \bar N_1 \ldots \bar N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar N_1 \ldots \bar N_8 \end{bmatrix}$$

Die Element-Styfheidsmatriks

Vir hierdie twee-dimensionele eindige element word die interne vervormingsenergie per eenheidsarea gegee deur

$$U_o = 1/2\,\{N\}^T\{\epsilon_o\} + 1/2\,\{M\}^T\{\chi\} + 1/2\,\{Q\}^T\{\gamma\}$$

met inagneming van vergelykings 5, 6, 7 en 8, volg

$$U_o = 1/2\{a\}^T([BE]^T[A][BE] + [BE]^T[B][BB] + [BB]^T[B][BE] + [BB]^T[D][BB] + [BS]^T[E][BS])\{a\}$$

Die styfheidsmatriks kan nou bepaal word via die bekende variasie-tegniek as

$$[k] = \int\int([BE]^T[A][BE] + [BE]^T[B][BB] + [BB]^T[B][BB] + [BB]^T[B][BE] + [BB]^T[D][BB] + [BS]^T[E][BS])\,dA \tag{9}$$

Numeriese Resultate

'n Eindige element volgens vergelyking 9 is geïmplementeer as element COMPL in die ADINA eindige element pakket en vergelyk met analitiese en eindige element oplossings van [3], [6] en [8].

Ingeklemde plaat ($\phi = 45°$):

$E_L = 206\ GN/m^2$
$E_T = 5{,}1\ GN/m^2$
$\nu_{LT} = 0{,}25$
$G_{LT} = 3{,}1\ GN/m^2$
$G_{TT'} = G_{LT'} = 2{,}5\ GN/m^2$
$K_1 = K_2 = 1$
slankheid = 0,01
breedte = lengte = 10 m
belasting = 100 N/m²

Die analitiese oplossing [6] is 'n middelpuntverplasing van $w_c = 3{,}1543.10^{-4}$ m.

Tabel 1: Eindige Element Resultate vir 'n Ingeklemde ($\phi = 45°$) Plaat

Element verdeling	w_c (m) COMPL	% fout COMPL	% fout TRIPLT
4 × 4	$2{,}2892.10^{-4}$	27,0%	37,0%
6 × 6	$2{,}9184.10^{-4}$	8,0%	14,0%
8 × 8	$3{,}0819.10^{-4}$	2,3%	3,6%
10 × 10	$3{,}1184.10^{-4}$	1,1%	–

Opgelegde plaat $[(0/90)_2/\bar 0]_s$:

Nege lae is gemodelleer, elk met 'n dikte van 0,011 m en 'n plaatslankheidsverhouding van 0,01. Dieselfde materiaal as vir die $\phi = 45°$ ingeklemde plaat is gebruik en die analitiese oplossing [6] is $w_c = 8{,}7054.10^{-4}$ m.

Tabel 2: Eindige Element Resultate vir 'n Opgelegde Plaat $[(0/90)_2/\bar 0]_s$

Element verdeling	w_c (m)
4 × 4	$8{,}5956.10^{-4}$
6 × 6	$8{,}6160.10^{-4}$
8 × 8	$8{,}6173.10^{-4}$

Opgelegde plaat [−5/5]:

E_L	$= 275{,}792$ GN/m²	(40×10^6 pvd)
E_T	$= 6{,}895$ GN/m²	(1×10^6 pvd)
υ_{LT}	$= 0{,}25$	
G_{LT}	$= 3{,}447$ GN/m²	($0{,}5 \times 10^6$ pvd)
$G_{TT'}$	$= G_{LT'} = 2{,}758$ GN/m²	
K_1	$= K_2 = 0{,}91$	
slankheid	$= 0{,}02$	
dikte van elke laag	$= 0{,}0254$ m (1 duim)	
drukbelasting	$= 689$ kN/m² (100 pvd)	

resultate vir middelpuntverplasing [6] en [8]:

klassieke laminasieteorie	= 15,037 mm
TRIPLT (6 × 6)	= 15,392 mm
MLP3K	= 15,469 mm
COMPL (8 × 8)	= 15,369 mm

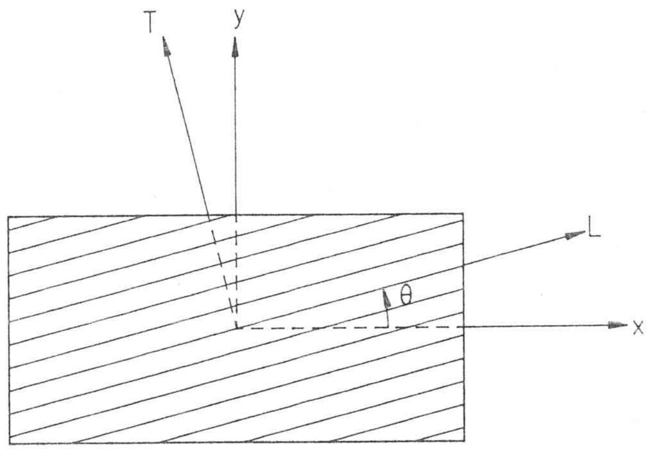
Gevolgtrekking

Die COMPL-element berus op 'n eenvoudige formulering, is ongekompliseerd om toe te pas, en vergelyk numeries goed met ander elemente wat vir dieselfde doel ontwikkel is.

Die effek van dwarsskuif en dinamiese uitbreiding word verder ondersoek.

Verwysings

1. Yang, P. C., Norris, C. H. en Stavsky, Y., "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates", *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, 1966, pp. 665-684.
2. Reddy, J. N., "A Penalty Plate-Bending Element for Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates", *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 1187-1206.
3. Noor, A. K. en Mathers, M. D., "Finite Element Analysis of Anisotropic Plates", *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 289-307.
4. Pryor, C. W. en Barker R. M., "A Finite Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates", *AIAA Journal*, Vol. 9, 1971, pp. 912-917.
5. Whitney, J. M., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, 1969, p. 534.
6. Lakshminarayana, H. V. en Murthy, S. S., "A Shear-Flexible Triangle Finite Element Model for Laminated Composite Plates", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 591-623.
7. Spilker, R. L., "An Invariant 8 Node Hybrid-Stress Element for Thin and Thick Multilayer Laminated Plates", *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp. 573-587.
8. Spilker, R. L., Chou, S. C. en Orringer, O., "Alternate Hybrid-Stress Elements for Analysis of Multilayer Composite Plates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 11, 1977, pp. 51-59.
9. Chow, T. S., "On the Propagation of Flexural Waves in an Orthotropic Laminated Plate and its Response to an Impulse Load", *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, 1971., pp. 306-319.
10. Bert, C. W., "Simplified Analysis of Static Shear Factors for Beams of Non-Homogeneous Cross Section", *Journal of Composite Materials*, Vol. 7, 1973, pp. 525-529.
11. Bert, C. W., "Transverse Shear Effects in Bimodular Composite Laminates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 17, 1983, pp. 228-298.
12. Bert, C. W., "A Critical Evaluation of New Plate Theories Applied to Laminated Composites", *Composite Structures*, Vol. 2, 1984, pp. 329-347.



Figuur A1 – Lamina-oriëntasie en -assestelsels

BYLAE A: VERGELYKINGS

Figuur A1 is van toepassing.

$$\bar{Q}_{11} = c^4E_{1111} + 2c^2s^2E_{1122} + s^4E_{2222} + 4s^2c^2E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{12} = c^2s^2E_{1111} + s^4E_{1122} + c^4E_{1122} + s^2c^2E_{2222} - 4s^2c^2E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{16} = sc^3E_{1111} + s^3cE_{1122} - sc^3E_{1122} - s^3cE_{2222} + 2sc(-c^2 + s^2)E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{22} = s^4E_{1111} + 2s^2c^2E_{1122} + c^4E_{2222} + 4s^2c^2E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{26} = s^3cE_{1111} + c^3sE_{1122} - s^3cE_{1122} - c^3sE_{2222} + 2sc(c^2 - s^2)E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{66} = s^2c^2E_{1111} - 2s^2c^2E_{1122} + s^2c^2E_{2222} + (c^4 - 2s^2c^2 + s^4)E_{1212}$$
$$\bar{Q}_{44} = c^2E_{1313} + s^2E_{2323}$$
$$\bar{Q}_{45} = csE_{1313} - csE_{2323}$$
$$\bar{Q}_{55} = s^2E_{1313} + c^2E_{2323}$$

$$c = \cos\phi$$
$$s = \sin\phi$$

$$E_{1111} = E_L/(1 - \upsilon_{LT}\,\upsilon_{TL})$$
$$E_{2222} = E_T/(1 - \upsilon_{LT}\,\upsilon_{TL})$$
$$E_{1122} = \upsilon_{LT}E_T(1 - \upsilon_{LT}\,\upsilon_{TL})$$
$$E_{1122} = \upsilon_{LT}E_T/1 - \upsilon_{LT}\,\upsilon_{TL})$$
$$E_{1212} = G_{LT}$$
$$E_{1313} = G_{LT'}$$
$$E_{2323} = G_{TT'}$$